Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück SS 2015

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 2

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1. Zeige, dass ein Ring mit $0 = 1$ der Nullring ist.

Aufgabe 2.2. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gibt.

Aufgabe 2.3. Formuliere und beweise das allgemeine Distributivitätsgesetz für einen Ring.

Aufgabe 2.4. Sei R ein Ring und seien $\spadesuit$, $\heartsuit$ und $\clubsuit$ Elemente in R. Berechne das Produkt

$$(\spadesuit^2 - 3\heartsuit\clubsuit\heartsuit - 2\clubsuit\heartsuit^2 + 4\spadesuit\heartsuit^2)(2\spadesuit\heartsuit^3\spadesuit - \clubsuit^2\spadesuit\heartsuit\spadesuit)(1 - 3\clubsuit\heartsuit\spadesuit\clubsuit^2\heartsuit)\,.$$

Wie lautet das Ergebnis, wenn der Ring kommutativ ist?

Aufgabe 2.5. Es sei R ein kommutativer Ring und $f, a_i, b_j \in R$. Zeige die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f^i + \sum_{j=0}^{m} b_j f^j = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) f^k$$

und

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j f^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_k f^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{n} a_r b_{k-r}\,.$$

Aufgabe 2.6. Formuliere die *binomischen Formeln* für zwei reelle Zahlen und beweise die Formeln mit Hilfe des Distributivgesetzes.

Aufgabe 2.7.*

Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Bedingung
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$
erfüllen.

Man mache sich dies auch für $k < 0$ und $k \geq n$ klar.

Aufgabe 2.8.*

Es sei M eine n-elementige Menge. Zeige, dass die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M gleich dem Binomialkoeffizienten
$$\binom{n}{k}$$
ist.

Aufgabe 2.9. Sei R ein Ring und M eine Menge. Definiere auf der Abbildungsmenge
$$A = \{f : M \to R |\, f \text{ Abbildung}\}$$
eine Ringstruktur.

Aufgabe 2.10. Es sei R ein kommutativer Ring und seien f, g Nichtnullteiler in R. Zeige, dass das Produkt fg ebenfalls ein Nichtnullteiler ist.

Aufgabe 2.11. Sei R ein Ring und seien $S_i \subseteq R$, $i \in I$, Unterringe. Zeige, dass dann auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} S_i$ ein Unterring von R ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.12. (3 Punkte)

Sei M eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit dem Durchschnitt $\cap$ als Multiplikation und der symmetrischen Differenz $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ als Addition ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 2.13. (4 Punkte)

Beweise die Formel
$$n 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} .$$

Aufgabe 2.14. (3 Punkte)

Bestimme die Nullteiler und die Nichtnullteiler in $\mathbb{Z}/(12)$.

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff des *nilpotenten* Elementes in einem Ring.

Ein Element a eines Ringes R heißt *nilpotent*, wenn $a^n = 0$ ist für eine natürliche Zahl n.

Aufgabe 2.15. (2 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und es seien $f, g \in R$ nilpotente Elemente. Zeige, dass dann die Summe $f + g$ ebenfalls nilpotent ist.

Aufgabe 2.16. (2 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ eine fixierte positive natürliche Zahl. Zeige, dass die Menge aller rationalen Zahlen, die man mit einer Potenz von n als Nenner schreiben kann, einen Unterring von $\mathbb{Q}$ bildet.

Aufgabe 2.17. (3 Punkte)

Es sei $R = \mathbb{Z}[\frac{2}{3}]$ der von $\mathbb{Z}$ und $2/3$ erzeugte Unterring von $\mathbb{Q}$. Zeige, dass R alle rationalen Zahlen enthält, die sich mit einer Potenz von 3 im Nenner schreiben lassen.